数学 コース2 （上級コース）

I

問 1 次の 2 つの条件を満たす 2 次関数を求めよう:

(i) $x=1$ と $x=5$ で同じ値をとる。
(ii) $-2 \leqq x \leqq 6$ における最大値は 30 であり，最小値は -20 である。

求める 2 次関数を

$$y = ax^2 + bx + c$$

とおくと，条件 (i) より

$$b = -\boxed{\text{A}}\,a$$

を得る。さらに，この 2 次関数は条件 (ii) を満たすから

$$\begin{cases} -\boxed{\text{B}}\,a + c = -20 \\ \boxed{\text{CD}}\,a + c = 30 \end{cases}$$

または

$$\begin{cases} -\boxed{\text{B}}\,a + c = 30 \\ \boxed{\text{CD}}\,a + c = -20 \end{cases}$$

を得る。したがって，求める 2 次関数は

$$y = \boxed{\text{F}}\,x^2 - \boxed{\text{FG}}\,x - \boxed{\text{H}}$$

と

$$y = \boxed{\text{I}}\,x^2 - \boxed{\text{JK}}\,x + \boxed{\text{LM}}$$

である。

問 2 $P = 6ab + 9a - 4b - 6$ とする。

(1) P は

$$P = (\boxed{\text{N}}\,a - \boxed{\text{O}})(\boxed{\text{P}} + \boxed{\text{Q}})$$

と因数分解できる。

(2) $a = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$, $P = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ のとき，$b = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{R}}} - \boxed{\text{S}}}{\boxed{\text{T}}}$ である。

(3) $P = 17$ を満たす整数 a, b の組は

$$(a,\ b) = (\boxed{\text{U}},\ \boxed{\text{V}}),\ (a,\ b) = (\boxed{\text{WX}},\ \boxed{\text{YZ}})$$

の 2 組である。

II

等比数列 $\{a_n\}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ は，初項から第 10 項までの和が 93 であり

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_8 + a_9 - a_{10} = 31$$

を満たす。このとき

(1) $\{a_n\}$ の公比は $\dfrac{\boxed{\mathsf{A}}}{\boxed{\mathsf{B}}}$，初項は $\dfrac{\boxed{\mathsf{CDE}}}{\boxed{\mathsf{FG}}}$ である。

(2) また

$$1 - \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_1}{a_3} - \frac{a_1}{a_4} + \frac{a_1}{a_5} - \frac{a_1}{a_6} + \frac{a_1}{a_7} - \frac{a_1}{a_8} + \frac{a_1}{a_9} - \frac{a_1}{a_{10}} = -\boxed{\mathsf{HIJ}}$$

である。

III

正の実数 a に対して，x の方程式

$$2^{x^2+6} = a^{2x-5} \qquad \cdots\cdots ①$$

の解の個数を調べよう。
①は

$$x^2 - \boxed{\mathrm{A}}(\log_2 a)x + \boxed{\mathrm{B}}\log_2 a + \boxed{\mathrm{C}} = 0$$

と変形できる。この 2 次方程式の判別式を D とおくと

$$D/4 = (\log_2 a + \boxed{\mathrm{D}})(\log_2 a - \boxed{\mathrm{E}})$$

となる。したがって

$$\frac{\boxed{\mathrm{E}}}{\boxed{\mathrm{G}}} < a < \boxed{\mathrm{HI}} \quad \text{のとき，解は} \boxed{\mathrm{J}} \text{個}$$

$$a = \frac{\boxed{\mathrm{E}}}{\boxed{\mathrm{G}}},\ \boxed{\mathrm{HI}} \quad \text{のとき，解は} \boxed{\mathrm{K}} \text{個}$$

$$a < \frac{\boxed{\mathrm{E}}}{\boxed{\mathrm{G}}},\ \boxed{\mathrm{HI}} < a \quad \text{のとき，解は} \boxed{\mathrm{L}} \text{個}$$

である。

また

$$a = \frac{\boxed{\mathrm{E}}}{\boxed{\mathrm{G}}} \text{のとき，① の解は} \boxed{\mathrm{MN}}$$

であり

$$a = \boxed{\mathrm{HI}} \text{のとき，① の解は} \boxed{\mathrm{O}}$$

である。

IV

問 1 関数 $f(x)$ の導関数は x^2+x-1 である。さらに，$y=f(x)$ のグラフが直線 $y=x+1$ と接しているとき，$f(x)$ を求めよう。

まず $y=f(x)$ と $y=x+1$ の接点の座標を求めよう。接線の傾きが $\boxed{\text{A}}$ であるから

$$x^2+x-\boxed{\text{B}}=0$$

を解くと，接点の x 座標 $\boxed{\text{CD}}$，$\boxed{\text{E}}$ が求まる。よって，接点の座標は

$$(\boxed{\text{CD}},\ \boxed{\text{FG}})\ \text{または}\ (\boxed{\text{E}},\ \boxed{\text{H}})$$

となる。

したがって，求める $f(x)$ は

$$y=f(x)=\frac{1}{\boxed{\text{I}}}x^3+\frac{1}{\boxed{\text{J}}}x^2-x-\frac{\boxed{\text{K}}}{\boxed{\text{L}}} \qquad \cdots\cdots②$$

または

$$y=f(x)=\frac{1}{\boxed{\text{I}}}x^3+\frac{1}{\boxed{\text{J}}}x^2-x-\frac{\boxed{\text{MN}}}{\boxed{\text{O}}} \qquad \cdots\cdots③$$

である。

さらに，②のグラフは ③ のグラフを y 軸方向に平行移動したものであるから，②，③の グラフと 2 つの直線，$x=\boxed{\text{CD}}$, $x=\boxed{\text{E}}$ によって囲まれる部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{PQ}}}{2}$ である。

問 2 関数

$$f(x) = |\sin 2x| \cos x \qquad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

は $x = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{R}}}$, $x = \dfrac{\boxed{\text{S}}}{\boxed{\text{T}}}$ で極大値 $\dfrac{1}{\boxed{\text{U}}}$ をとり，また，$x = \dfrac{\pi}{\boxed{\text{V}}}$ のときも極大値 $\boxed{\text{W}}$ をとる。

関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸が囲む図形の面積を S とおくと

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx = \frac{\boxed{\text{X}}}{\boxed{\text{Y}}}$$

に注意して

$$S = \boxed{\text{Z}}$$

を得る。

解答

I								
問 1					問 2			
A	B	CD	EFGH	IJKLM	NOPQ	RST	UV	WXYZ
6	9	16	2122	21212	3223	264	17	$-5-2$

II		
AB	CDEFG	HIJ
12	51211	341

III								
ABC	DE	FG	HI	J	K	L	MN	O
256	16	12	64	0	1	2	-1	6

IV																
問 1										問 2						
A	B	CD	E	FG	H	IJ	KL	MNO	PQ	R	ST	U	V	W	XY	Z
1	2	-2	1	-1	2	32	73	136	27	8	78	2	2	0	14	1